Euclid's Game

யூக்ளிடின் விளையாட்டு

Introduction

அறிமுகம்

Playing games is a lot of fun. Today you are going to play a game that involves numbers, and you will find a way to win the game, always!

விளையாடுதல் நமக்கு மிகுந்த மகிழ்ச்சியைத் தரும் ஒரு செயலாகும் . எண்களைக் கொண்டு இன்று நாம் விளையாட போகிறோம் . இதில் எப்போதுமே வெற்றிபெறுவதற்கான உத்தியையும் நீங்கள் தெரிந்துக்கொள்ள போகிறீர்கள்.

Task 1: Play the Euclid's game

முதல் செயல்: யூக்ளிடின் விளையாட்டு

1. This is a two-player game.

1. விளையாட இரு நபர்கள் தேவை.

2. The rules of the game are as follows.

2. விளையாட்டின் விதிகள் பின்வருமாறு.

- You can decide who plays first.The first player, say Player 1, writes down a number that is between 1 and 100, including both. Let us call this number 'A'. The second player, say Player 2, can write down another number of his/her choice. Let's call this number 'B'.
- விளையாட்டை யார் தொடங்குவார்கள் என்பதை நீங்களே முடிவு செய்து கொள்ளலாம். முதல் ஆட்டக்காரர் (ஆட்டக்காரர் 1), 1 முதல் 100 வரையில் உள்ள ஓர் எண்ணைத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொண்டு அதை எழுத வேண்டும். இந்த எண்ணை 'A' எனக் கொள்வோம். இரண்டாம் ஆட்டக்காரர் (ஆட்டக்காரர் 2), மிதமுள்ள 99 எண்களில் விருப்பப்பட்ட ஒன்றை எழுதிக்கொள்ளலாம். இந்த எண்ணை 'B' எனக் கொள்வோம்.
- Now, the first player will write the number (A – B) or (B – A), whichever is positive. Let's call this number 'C'.
- இப்போது, முதல் ஆட்டக்காரர் (A – B) அல்லது (B – A)-ஐ கணக்கிட வேண்டும். எதில் மிகை எண்ணை (positive number) விடையாக பெறுகிறாரோ அதை அவர் எழுதிக் கொள்ள வேண்டும் . இந்த எண்ணை 'C' எனக் கொள்வோம்.
- Next, it is the second player's turn. He/she has a choice. He/She can either write the difference between C and A or the difference between C and B. However, if one of these differences is already in the list (i.e., if it is A or B or C) then it cannot be written again. (All differences are taken to be positive.)
- பின்னர், இரண்டாம் ஆட்டக்காரர் அவரது சுற்றில் (C – A) அல்லது (C – B)-இல் எதைக் கணக்கிடப்போகிறார் என்பதைத் தேர்ந்தெடுத்துக்கொள்ளலாம். ஆனால், எண் தொகுப்பில் ஏற்கனவே

CC-BY-SA 4.0 license, HBCSE

அவ்வெண் இடம் பெற்றிருந்தால் (அதாவது, A அல்லது B அல்லது C ஆக இருந்தால்) அது மீண்டும் எழுதப்படக்கூடாது. (கழித்தலில் பெற்ற எண் மிகை எண்களாக கருதப்படும்)

- Similarly, in subsequent turns, the players take turns to write a number which is the difference between any two numbers in the list, provided the number itself is not already present in the list.
- இதேபோல, எண் தொகுப்பில் இடம்பெற்றிருக்கும் எதாவது இரு எண்களின் வித்தியாசத்தை அடுத்தடுத்த சுற்றில் கணக்கிட்டு ஆட்டக்காரர்கள் எழுதிக்கொள்வார்கள். ஆனால், அது தொகுப்பில் ஏற்கனவே இடம்பெறாத எண்ணாகவும் இருக்க வேண்டும்.
- The game ends when it is not possible to write any new number.
- கழித்தலின் மூலம், புதிதான எண் ஏதும் கிடைக்கவில்லை என்றால் ஆட்டம் முடிவுபெற்றுவிட்டதாக கருதிக்கொள்ள வேண்டும்.
- The person who writes the last number will be the winner.
- இறுதி எண்ணைப் பதிவிட்டவர்தான் ஆட்டத்தில் வெற்றி பெற்றவராவார்.

Let us look at a sample run of the game.

ஓர் எடுத்துக்காட்டை இப்போது பார்க்கலாம்.

- Suppose, the first player writes 12. The second player has 99 choices to choose his/her number (as the upper limit is 100).
- முதல் ஆட்டக்காரர் எண் 12-ஐ தேர்ந்தெடுக்கிறார் என்று எடுத்துக்கொள்வோம். இப்போது இரண்டாம் ஆட்டக்காரர் 99 எண்களில் ஒன்றைத் தேர்ந்தெடுக்கலாம். (100 எண்கள் இருக்கின்றன என்பதால்)
- Suppose, the second player chooses 16, then the first player can only write 4, i.e. the difference between 16 and 12.
- இரண்டாம் ஆட்டக்காரர் எண் 16-ஐ தேர்ந்தெடுக்கிறார் என்றால், முதல் ஆட்டக்காரர் எண் 4-ஐ தான் எழுத முடியும். ஏனென்றால், 16-லிருந்து 12-ஐ கழிக்கிறோம்.
- The second player then writes 8, the difference between 12 and 4. Note that the player could not have written the difference between 16 and 4, as 12 is already in the list.
- பின்னர், 12-லிருந்து 4-ஐ கழிப்பதால் இரண்டாம் ஆட்டக்காரர் 8-ஐ எழுதுகிறார். இவர் 16 மற்றும் 4-இன் வித்தியாசத்தை எழுதியிருக்க முடியாது ஏனென்றால் தொகுப்பில் 12 ஏற்கனவே இடம்பெற்றிருக்கிறது.
- Now there is no possibility of writing new numbers, so the game ends with the numbers 4, 8, 12, and 16 appearing in the list (12, 16, 4, 8 in the order of appearance).
- இப்போது, புதிய எண்களேதும் எழுதுவதற்கான வாய்ப்புகள் இல்லை. ஆதலால், ஆட்டத்தின் முடிவில் எண்கள் 4, 8, 12, மற்றும், 16 ஆகியவைத் தொகுப்பில் இடம்பெற்றுள்ளது. (எழுதப்பட்ட வரிசையில்

எடுத்துக்கொண்டால் 12, 16, 4, 8 ஆகும்)

- There are four numbers in the list, and the second player is the winner, as he/she wrote the last number 8.
- தொகுப்பில் மொத்தம் நான்கு எண்கள் உள்ளன . இரண்டாம் ஆட்டக்காரரர் வெற்றி பெற்றார், ஏனென்றால் அவர்தான் இறுதி எண் 8-ஐ எழுதினார்.

Play this game with your partner multiple times. Study the lists of numbers that you got for each game and record your observations in the table below. For the last column, where you record the winner, mention whether Player 1 (who chose the first number) won or Player 2 (who chose the second number) won.

உங்கள் நண்பருடன் இந்த ஆட்டத்தைப் பல முறை விளையாடுங்கள் . ஒவ்வொரு ஆட்டத்திலும் தொகுப்பில் இடம்பெற்ற எண்களை ஆராய்ந்து , நீங்கள் உற்றுநோக்கியவற்றைக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையில் பதிவிடுங்கள். வெற்றி பெற்றவர் என்ற கட்டத்தில் , ஆட்டக்காரரர் 1 (முதல் எண்ணைத் தேர்ந்தெடுத்தவர்) அல்லது ஆட்டக்காரரர் 2 (இரண்டாம் எண்ணைத் தேர்ந்தெடுத்தவர்) என்று குறிப்பிடுங்கள்.

Initial Numbers		The smallest number in the list	The largest number in the list	All the numbers in the list (in ascending order)	How many numbers are there in the list?	Winner
Player 1	Player 2					

தொடக்க எண்கள்		தொகுப்பில் இடம்பெற்றுள்ள மிகச்சிறிய எண்	தொகுப்பில் இடம்பெற்றுள்ள மிகப்பெரிய எண்	தொகுப்பிலுள்ள அனைத்து எண்களும் (ஏறுவரிசையில் எழுதுங்கள்)	தொகுப்பில் எத்தனை எண்கள் உள்ளன?	வெற்றி பெற்றவர்
ஆட்டக்காரர் 1	ஆட்டக்காரர் 2					

CC-BY-SA 4.0 license, HBCSE

Task 2: Predict the numbers in the list

செயல் 2: பட்டியலில் உள்ள எண்களைக் கணித்தல்

Let us assume that the following are the initial numbers in the game. Based on these, can you predict the numbers that you will arrive at, while playing the game?

ஆட்டத்தின் தொடக்க எண்கள் வழங்கப்பட்டுள்ள நிலையில், விளையாடும்போது எந்தெந்த எண்களைப் பெறுவீர்கள் என்று உங்களால் கணித்திட முடியுமா?

(**Hint:** If you are stuck, look at the table you just made. See if there is any relationship between the initial numbers and the numbers in the list.)

(**குறிப்பு:** தீர்வு கிடைக்காமல் போனால் அட்டவணையைப் பாருங்கள். அதிலுள்ள தொடக்க எண்களுக்கும், பட்டியலிடப்பட்ட எண்களுக்கும் இடையே ஏதேனும் தொடர்பு உள்ளதா என்பதைச் யோசனைச் செய்யுங்கள்)

Predict all the numbers in the list if:

பின்வரும் தொடக்க எண்களுக்கு, முடிவாக கிடைக்ககூடிய எண்களைக் கணித்திடுங்கள்:

1. The initial numbers are 9 and 15.

1. 9 மற்றும் 15

____

2. The initial numbers are 20 and 9.

2. 20 மற்றும் 9

____

3. The initial numbers are 13 and 17.

3. 13 மற்றும் 17

____

4. The initial numbers are 7 and 35.

4. 7 மற்றும் 35

____

5. How did you predict the numbers for each example? Did you notice any patterns across the examples?

5. ஒவ்வொரு எடுத்துக்காட்டிற்கும் எண்களை எவ்வாறு கணித்தீர்கள்? இந்த எடுத்துக்காட்டுகளில் ஏதேனும் அமைப்பு இருப்பதைக் கவனத்தீர்களா?

____

____

____

6. Now that you know the strategy for finding the list, can you predict a strategy that will ensure that one of the players will always win this game? (Which player can adopt this strategy and always win?)

6. எண்களைக் கண்டறியும் உத்தி தற்போது உங்களுக்குத் தெரியும்.

அதேபோல, இரு ஆட்டக்காரர்களில் ஒருவரே எப்போதும் வெற்றி பெறுவதை உறுதிச் செய்வதற்கான ஓர் உத்தியை உங்களால் கணிக்க முடியுமா? (இருவரில் எந்த ஆட்டக்காரர் இந்த உத்தியைப் பயன்படுத்தி எப்போதும் வெற்றி பெறலாம்?)

Task 3: Looking for proofs of some conjectures

செயல் 3: சில ஊகங்களை நிரூபிக்க முயற்சித்தல்

Some students made these interesting observations after playing a few rounds of the game:

சில ஆட்டங்களுக்குப் பின், மாணவர்கள் சிலர் கவனித்த சுவாரஸ்யமான ஊகங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

Observation 1: The smallest number in the final list is the HCF of the initial pair of numbers.

ஊகம் 1: இறுதி எண்தொகுப்பில் உள்ள மிகச்சிறிய எண்தான் தொடக்க எண்களின் மீ.பொ.வ ஆகும்.

Observation 2: All and only the multiples of this smallest number up to the largest number appear in the list.

ஊகம் 2: பெரிய எண் வரையில் உள்ள இந்த மிகச்சிறு எண்ணின் அனைத்து மடங்குகள் மட்டுமே எண்தொகுப்பில் இடம்பெறும்.

1. Can you figure out why this happens for every pair of numbers?

1. அனைத்து எண்சோடிகளிலும் இவ்வாறு ஏன் நிகழ்கிறது என்பதை உங்களால் கூற முடியுமா?

Let us look at the two observations.

இரண்டு ஊகங்களையும் தனிதனியே இப்போது பார்க்கலாம்.

- Observation 1 says the following:
  a) The smallest number in the list divides both the initial numbers.
  b) The smallest number is not just any common factor, but the HCF of the two initial numbers.
- ஊகம் 1-ன் படி
  a) எண்தொகுப்பில் உள்ள மிகச்சிறு எண் தொடக்க எண்கள் இரண்டையுமே வகுக்கும்.
  b) எண்தொகுப்பில் உள்ள மிகச்சிறு எண் ஏதோ ஒரு பொது வகுஎண்ணாக மட்டும் இருப்பதில்லை, இரு தொடக்க எண்களின் மீ.பொ.வ ஆகவும் உள்ளது.
- Observation 2 implies the following:
  a) All the numbers in the list are multiples of the smallest number in the list,
  b) All the multiples of the smallest number up to the largest number appear in the list.

CC-BY-SA 4.0 license, HBCSE

- ஊகம் 2-ன் படி
    a) எண்தொகுப்பில் இடம்பெற்றுள்ள அனைத்து எண்களும் அதிலுள்ள மிகச்சிறு எண்ணின் மடங்குகளாக இருக்கும்.
    b) மிகப்பெரிய எண் வரையில் உள்ள மிகச்சிறு எண்ணின் மடங்குகள் அனைத்தும் எண்தொகுப்பில் இடம்பெறும்.

2. We need to prove or justify these observations. Can you think of the ways of doing this?

2. இந்த ஊகங்களை நிரூபிக்க அல்லது சரிபார்க்க வேண்டும் . இதைச் செய்திடும் வழிகளைக் கண்டுபிடிக்க உங்களால் முடியுமா?

___

___

Points to ponder

சிந்திக்க வேண்டியவை

1) Do all pairs of numbers allow for a winning strategy? If not, what kinds of numbers will allow for a winning strategy?

1) அனைத்து எண்சோடிகளும் வெற்றி பெறக்கூடிய உத்தியை அனுமதிக்குமா? இல்லையென்றால், எவ்வாறான எண்கள் வெற்றிபெறும் உத்தியை அனுமதிக்கும்?

2) What happens if you allow for the first three numbers to be random? Say, by making it a three-player game?

2) முதல் மூன்று எண்கள் தற்போக்காக தேர்ந்தெடுக்க அனுமதிக்கப்பட்டால் என்னவாகும்? அதாவது, மூவர் விளையாடும் ஆட்டமாக மாற்றியமைப்பது எவ்வாறிருக்கும்?

References

மேற்கோள்கள்

- Euclid's Game: https://www.cut-the-knot.org/blue/EuclidAlg.shtml
- The optimal strategy in Euclid's game. https://math.stackexchange.com/questions/754461/optimal-strategy-in-euclids-game