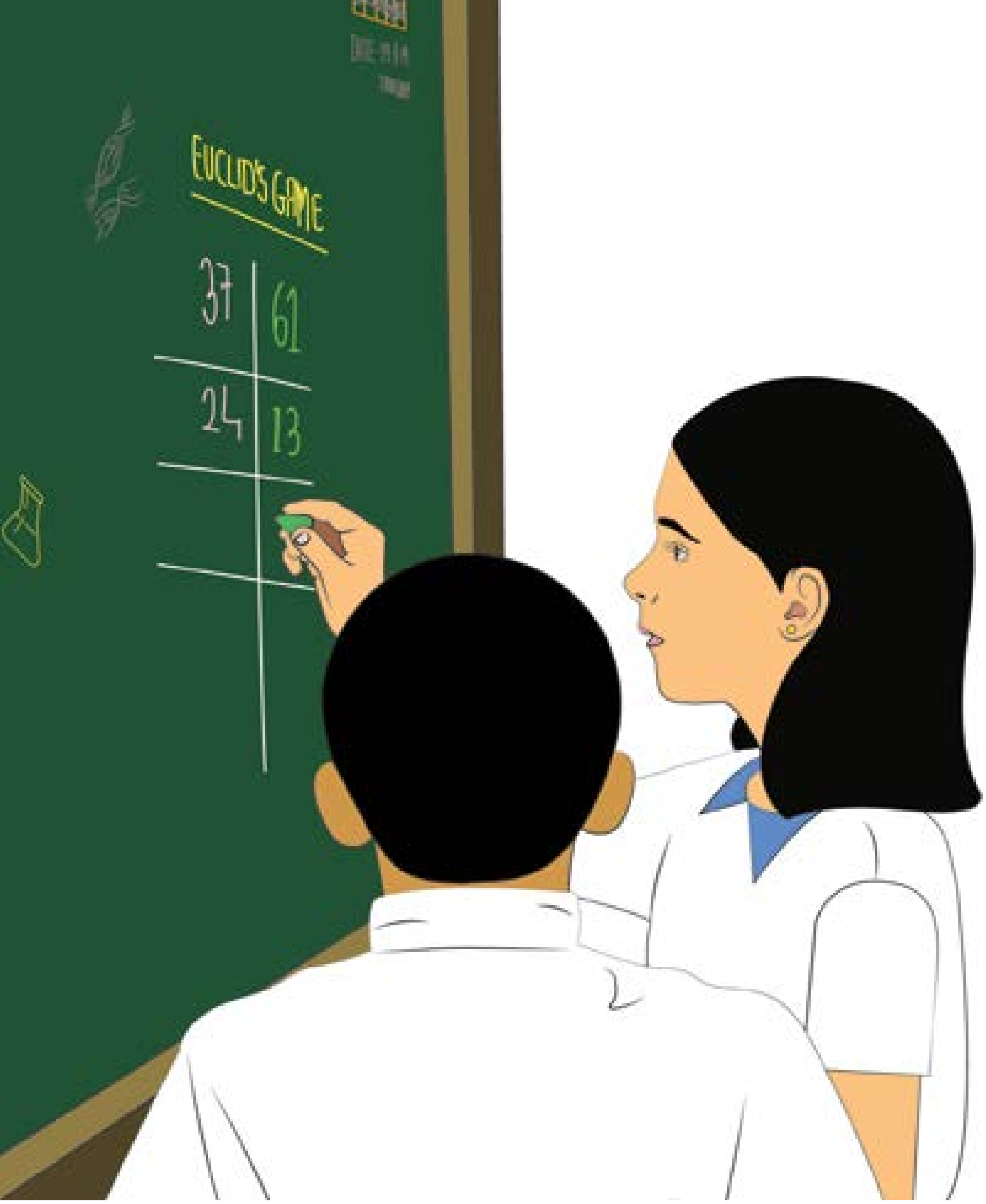

8.01

युक्लिडचे खेळ
Euclid’s Game

Main Authors: Jayasree S., Shweta Naik
Reviewers: Amol Dighe, H. C. Pradhan
English Editors: Beena Choksi, Geetanjali Date, Ankush Gupta, Reema Mani, K. Subramaniam
Marathi Translator: Vijay D. Lale
Marathi Editors: Deepa Chari, Vijay D. Lale
Marathi Editorial Assistance: Aaloka Kanhere, Sushma Rawool, Nilkantha Gholap
Creative Commons License: CC BY-SA 4.0 International, HBCSE

VIGYAN PRATIBHA
विज्ञान प्रतिभा

8.1. युक्लिडचे खेळ
Euclid's Game

ओळख
Introduction

आपल्याला खेळताना खूप मजा येते. आज आपण असा खेळ खेळणार आहोत, जो प्रत्येक वेळी जिंकण्यासाठी तुम्ही मार्ग शोधाल!
Playing games is a lot of fun. Today you are going to play a game that involves numbers, and you will find a way to win the game, always!

कृती 1: खेळा युक्लिडचा खेळ
Task 1: Play the Euclid's game

साहित्य
Materials

फळा, खडू, कागद
Blackboard, chalk and sheets of paper

1. या खेळात दोन विद्यार्थी भाग घेऊ शकतात.
   This is a two-player game.
2. खेळाचे नियम पुढीलप्रमाणे आहेत.
   The rules of the game are as follows:
   - खेळाला सुरुवात प्रथम कोण करणार, हे तुम्ही ठरवू शकता. यात खेळाडू-1 ने 1 ते 100 पैकी कोणतीही एक नैसर्गिक संख्या लिहायची आहे. या संख्येला आपण '*A*' म्हणू. यानंतर खेळाडू-2 त्याच्या आवडीची 1 ते 100 पैकी दुसरी कोणतीही संख्या लिहिल. या संख्येला आपण '*B*' म्हणू.
     You can decide who plays first. The first player, say Player 1, writes down a number that is between 1 and 100, including both. Let us call this number '*A*'. The second player, say Player 2, can write down another number of his/her choice. Let's call this number '*B*'.
   - आता विद्यार्थी-1 $(A - B)$ किंवा $(B - A)$ अशा रीतीने वजाबाकी करेल, ज्यामुळे उत्तर 'धन' संख्या येईल. या संख्येला आपण '*C*' म्हणू.
     Now, the first player will write the number $(A - B)$ or $(B - A)$, whichever is positive. Let's call this number '*C*'.
   - आता विद्यार्थी 2 खेळेल. तिच्याकडे पर्याय आहेत. ती *C* आणि *A* यांची वजाबाकी करू शकते किंवा *C* आणि *B* यांची वजाबाकी करू शकते. मात्र आलेले उत्तर यादीत असल्यास (जर *A*, *B* किंवा *C*), विद्यार्थीनी ती संख्या पुन्हा लिहू शकणार नाही (सर्व उत्तरे धन असायला हवीत, हे लक्षात ठेवा).
     Next, it is the second player's turn. He/she has a choice. He/She can either write the difference between *C* and A or the difference between *C* and *B*. However, if one of these differences is already in the list (i.e., if it is *A* or *B* or *C*) then it cannot be written again. (All differences are taken to be positive.)
   - खेळ असाच पुढे चालू ठेवताना खेळाडू आळीपाळीने यादीतील कोणत्याही दोन संख्याची वजाबाकी करून मिळालेली धन संख्या लिहितील. मात्र ती संख्या यादीमध्ये आधीपासूनच नाही, हे विद्यार्थी पाहतील.
     Similarly, in subsequent turns, the players take turns to write a number which is the difference between any two numbers in the list, provided the number itself is not already present in the list.
   - जेव्हा कोणतीही नवीन संख्या लिहिणे शक्य नसेल, तेव्हा हा खेळ संपेल.
     The game ends when it is not possible to write any new number.
   - जी खेळाडू शेवटची संख्या लिहिल, ती खेळ जिंकेल.
     The person who writes the last number will be the winner.

आता आपण हा खेळ एकदा खेळून पाहू.
Let us look at a sample run of the game.

- समजा, खेळाडू-1 ने 12 ही संख्या लिहिली, तर खेळाडू-2 ही उरलेल्या 99 संख्यांमधून संख्या निवडू शकते.
  Suppose, the first player writes 12. The second player has 99 choices to choose his/her number (as the upper limit is 100).
- समजा खेळाडू-2 ने 16 ही संख्या निवडली, तर खेळाडू-1 ही 4 ही संख्या लिहिल, कारण 16 आणि 12 यांची वजाबाकी 4 येते.
  Suppose, the second player chooses 16, then the first player can only write 4, i.e. the difference between 16 and 12.
- त्यानंतर खेळाडू-2 ही 8 ही संख्या लिहिल. कारण 12 आणि 4 यांची वजाबाकी केल्यास उत्तर 8 येते. लक्षात घ्या, खेळाडू-2 ने 16 आणि 4 यांच्या वजाबाकीतून येणारी 12 ही संख्या लिहिलेली नाही, कारण 12 ही संख्या आधीपासूनच यादीत आहे.
  The second player then writes 8, the difference between 12 and 4. Note that the player could not have written the difference between 16 and 4, as 12 is already in the list.
- आता, येथे कोणत्याही नवीन संख्येची शक्यता दिसत नाही. त्यामुळे हा खेळ 4, 8, 12, 16 या संख्यांबरोबर संपेल (यादीत 12, 16, 4, 8 या क्रमाने संख्या येतात).
  Now there is no possibility of writing new numbers, so the game ends with the numbers 4, 8, 12, and 16 appearing in the list (12, 16, 4, 8 in the order of appearance).
- वरील यादीत चार संख्या आहेत आणि खेळाडू-2 ने हा खेळ जिंकलेला आहे. कारण शेवटची 8 ही संख्या तिने लिहिली आहे.
  There are four numbers in the list, and the second player is the winner, as he/she wrote the last number 8.

तुमच्या वर्गमित्रांबरोबर हा खेळ पुन्हापुन्हा खेळा. प्रत्येक वेळी खेळताना तयार झालेल्या यादीचा अभ्यास करा आणि तुमची निरीक्षणे पुढील तक्त्यात लिहा. शेवटच्या रकान्यात जेथे तुम्ही विजेत्याचे नाव लिहाल, तेथे खेळाडू-1 (ज्याने पहिली संख्या निवडली) जिंकला किंवा खेळाडू-2 (ज्याने दुसऱ्यांदा संख्या निवडली) जिंकला, ते लिहा.
Play this game with your partner multiple times. Study the lists of numbers that you got for each game and record your observations in the table below. For the last column, where you record the winner, mention whether Player 1 (who chose the first number) won or Player 2 (who chose the second number) won.

सुरुवातीच्या संख्या Initial Numbers		यादीतील सर्वांत लहान संख्या The smallest number in your sequence	यादीतील सर्वांत मोठी संख्या The largest number in your sequence	यादीतील सर्व संख्या (चढत्या क्रमाने) All numbers in a sequence (in ascending order)	यादीत एकूण किती संख्या आहेत? How many numbers are there in your sequence?	विजेता Winner
खेळाडू-1 Player 1	खेळाडू-2 Player 2					

तक्ता 1
Table 1

कृती 2: यादीतील संख्यांचा अंदाज बांधणे
Task 2: Predict the numbers in the list

समजा खेळामध्ये सुरुवातीच्या संख्या पुढीलप्रमाणे आहेत. या संख्यांपासून खेळ खेळल्यास तुमच्या यादीत कोणत्या संख्या येतील, याचा अंदाज तुम्हाला बांधता येईल का?
Let us assume that the following are the initial numbers in the game. Based on these, can you predict the numbers that you will arrive at, while playing the game?

(**सूचना:** उत्तर देताना अडल्यास तुम्ही बनवलेला तक्ता पहा. सुरुवातीच्या संख्या आणि यादीतील संख्या यांच्यात काही संबंध आहे का, ते पहा).
(**Hint:** If you are stuck, look at the table you just made. See if there is any relationship between the initial numbers and the numbers in the list.)

1. सूचीतील सर्व संख्यांचा अंदाज लावा जर:
   Predict all the numbers in the list if:
   i. सुरुवातीच्या संख्या 9 आणि 15 असतील
      The initial numbers are 9 and 15

      ____

   ii. सुरुवातीच्या संख्या 20 आणि 9 असतील
       The initial numbers are 20 and 9

       ____

   iii. सुरुवातीच्या संख्या 13 आणि 17 असतील
        The initial numbers are 13 and 17

        ____

   iv. सुरुवातीच्या संख्या 7 आणि 35 असतील
       The initial numbers are 7 and 35

       ____

2. प्रत्येक उदाहरणासाठी कोणत्या संख्या येतील, याचा तुम्ही अंदाज कसा बांधला? या उदाहरणांमध्ये तुम्हाला काही आकृतिबंध दिसले का?
   How did you predict the numbers for each example? Did you notice any patterns across the examples?

   ____

   ____

   ____

3. आता, यादी मिळण्यासाठी कोणते धोरण वापरायचे आहे, हे तुम्हाला कळले आहे. तुम्ही असे धोरण सांगू शकाल का, ज्यामुळे या खेळात नेहमी एकच खेळाडू सतत जिंकेल? (कोणता खेळाडू हे धोरण वापरून नेहमी जिंकू शकतो?)
   Now that you know the strategy for finding the list, can you predict a strategy that will ensure that one of the players will always win this game? (Which player can adopt this strategy and always win?)

   ____

   ____

   ____

कृती 3: काही अनुमानांची सिद्धता पाहणे
Task 3: Looking for proofs of some conjectures

काही विद्यार्थ्यांनी हा खेळ खेळल्यानंतर काही रोचक निरीक्षणे नोंदवली आहेत.
Some students made these interesting observations after playing a few rounds of the game:

निरीक्षण 1: यादीतील सर्वांत लहान संख्या ही सुरुवातीच्या जोडीतील संख्याची मसावि असते.
Observation 1: The smallest number in the final list is the HCF of the initial pair of numbers.

निरीक्षण 2: यादीतील सर्व संख्या या सर्वांत लहान संख्येच्या पटी आहेत. तसेच यादीमध्ये लहान संख्येपासून मोठ्या संख्येपर्यंत लहान संख्येच्या सर्व पटीदेखील आहेत.
Observation 2: All and only the multiples of this smallest number up to the largest number appear in the list.

1. संख्यांच्या प्रत्येक जोडीसाठी असे का होते, यासंबंधी तुम्हाला काही सांगता येईल का?
   Can you figure out why this happens for every pair of numbers?

   _

   _

पुढील दोन निरीक्षणांबाबत चर्चा करूया.
Let us look at the two observations.

- निरीक्षण 1 असे सांगते,
  Observation 1 says the following:
  a. यादीतील सर्वांत लहान संख्येने सुरुवातीच्या दोन्ही संख्यांना भाग देता येतो.
     The smallest number in the list divides both the initial numbers.
  b. सर्वांत लहान संख्या ही फक्त सामाईक विभाजक नाही, तर सुरुवातीच्या दोन संख्यांचा मसावि असते.
     The smallest number is not just any common factor, but the HCF of the two initial numbers.
- निरीक्षण 2 असे सांगते :
  Observation 2 implies the following:
  a. यादीतील सर्व संख्या या सर्वांत लहान संख्येच्या पटी असतात.
     All the numbers in the list are multiples of the smallest number in the list.
  b. यादीतील सर्व संख्या या सर्वांत लहान संख्येच्या पटी आहेत. तसेच यादीमध्ये लहान संख्येपासून मोठ्या संख्येपर्यंत लहान संख्येच्या सर्व पटी आहेत.
     All the multiples of the smallest number up to the largest number appear in the list.

2. आपल्याला ही निरीक्षणे सिद्ध करायची आहेत. तुम्हाला काही मार्ग सुचतात का, ते लिहा.
   We need to prove or justify these observations. Can you think of the ways of doing this?

   _

   _

विचारात घेण्याच्या बाबी
Points to ponder

1. संख्यांची कोणतीही जोडी वापरून जिंकता येते का? नसल्यास, संख्यांच्या कोणत्या जोड्या वापरून जिंकता येईल?
   Do all pairs of numbers allow for a winning strategy? If not, what kinds of numbers will allow for a winning strategy?
2. समजा हा खेळ तीन जणांनी मिळून खेळला आणि तीन संख्या घेऊन सुरुवात केली तर काय होईल?
   What happens if you allow for the first three numbers to be random? Say, by making it a three-player game?

संदर्भ
References

- Euclid's Game: https://www.cut-the-knot.org/blue/EuclidAlg.shtml
- The optimal strategy in Euclid's game: https://math.stackexchange.com/questions/754461/optimal-strategy-in-euclids-game