

LU 8.1 Euclid's game

LU 8.1 યુક્લિડની રમત

Materials required: Blackboard, chalk and sheets of paper.

જરૂરી સામગ્રી: બ્લેક બોર્ડ, ચોક અને કાગળ.

Introduction

પરિચય

Playing games is a lot of fun. Today you are going to play a game that involves numbers, and based on these numbers you will find out a way to win the game, always!

રમત રમવું ખૂબજ આનંદદાયક છે. આજે તમે એક એવી રમત રમવા જઈ રહ્યાં છો કે જેમાં સંખ્યાઓનો સમાવેશ છે, અને આ સંખ્યાઓના આધારે તમે આવી રીત શોધશો જેનાથી તમે રમત હંમેશા જીતી શકશો!

Task 1: Play the Euclid's game

કાર્ય 1: યુક્લિડની રમત રમો

1. This is a two-player game.

આ રમતમાં બે વિદ્યાર્થીઓ ભાગ લઈ શકશે.

2. The rules of the game are as follows:

રમતના નિયમો આ પ્રમાણે છે:

- You can decide who plays first. The first player, say Player 1, writes down a number that is between 1 and 100, including both. Let's call this number 'A'. The second player, say Player 2, can write down another number of his/her choice. Let's call this number 'B'.
રમત ની શરૂઆત કોણ કરશે, એ તમે નક્કી કરી શકો છો. પ્રથમ ખેલાડી, ખેલાડી-1, 1 થી 100 સુધીની કોઈપણ એક પ્રાકૃતિક સંખ્યા લખશે. ચાલો આ સંખ્યાને 'A' કહીએ. બીજો ખેલાડી, ખેલાડી-2, તેની પસંદગી ની બીજી કોઈ સંખ્યા લખી શકે છે. આ સંખ્યાને 'B' કહીએ.
- Now, the first player will write the number $(A - B)$ or $(B - A)$, whichever is positive. Let's call this number 'C'.
હવે, ખેલાડી-1 $(A-B)$ અથવા $(B-A)$, એવી રીતે બાદ કરશે કે જવાબની સંખ્યા 'ધન' હશે. ચાલો આ સંખ્યાને 'C' કહીએ.
- Next, it is the second player's turn. He/she has a choice. He/She can either write the difference between C and A or the difference between C and B. However, if one of these differences is already written in the list (i.e., if it is equal to A or B or C) then it cannot be written again. (All differences are to be taken positive)
હવે ખેલાડી-2 નો વારો છે. તેની પાસે 2 પસંદગી છે. તે ક્યાં તો C અને A વચ્ચેનો તફાવત અથવા C અને B વચ્ચેનો તફાવત લખી શકે છે. જો આમાંનો એક તફાવત યાદીમાં પહેલેથી જ લખાયેલો હોય (એટલે કે, જો તે તફાવત A અથવા B અથવા C ની સમાન હોય) તો તે લખી શકશે નહીં. (બધા તફાવતો ધન લેવાના રહેશે).
- Similarly, in subsequent turns, the players take turns to write a number which is the difference between any two numbers written in the list, provided the number itself is not already present in the list.
એ જ રીતે, ખેલાડીઓ એક પછી એક, વારાફરતી, એવી સંખ્યા લખશે કે જે યાદીમાંના કોઈ પણ બે સંખ્યાઓ વચ્ચેનો તફાવત છે, પણ તે સંખ્યા પહેલેથી યાદીમાં ન હોવી જોઈએ.
- The game ends when it is not possible to write any new number.
જ્યારે કોઈ નવી સંખ્યા લખી ન શકાય, ત્યારે રમત સમાપ્ત થાય છે.

- The person who wrote the last number will be the winner.
જે ખેલાડી છેલ્લી સંખ્યા લખે છે, તે આ રમત જીતી જાય છે.

Let us look at a sample run of the game.

ચાલો રમતના એક નમૂના પર નજર કરીએ.

- Suppose, the first player writes 12. The second player has 99 choices to choose his/her number. (as the upper limit is 100).
ધારો કે, ખેલાડી-1 12 લખે છે. ખેલાડી-2 પાસે તેની સંખ્યા પસંદ કરવા માટે 99 પસંદગીઓ છે. (કારણ કે ઉપલી મર્યાદા 100 છે).
- Suppose, the second player chooses 16, then the first player can only write 4, i.e. the difference between 16 and 12.
ધારો કે, ખેલાડી-2 16 પસંદ કરે છે, તો ખેલાડી-1 માત્ર 4 લખી શકે છે, એટલે કે 16 અને 12 વચ્ચેનો તફાવત.
- The second player then writes 8, the difference between 12 and 4. Note that the player could not have written the difference between 16 and 4, as 12 is already in the list.
પછી ખેલાડી-2 8 લખે છે, 12 અને 4 વચ્ચેનો તફાવત. નોંધ કરો કે ખેલાડી-2 16 અને 4 વચ્ચેનો તફાવત લખી ન શક્યો હોત, કારણ કે 12 પહેલેથી જ યાદીમાં હાજર છે.
- Now there is no possibility of writing new numbers, so the game ends with the numbers 4, 8, 12, and 16 [12, 16, 4, 8 in the order of appearance].
હવે નવી સંખ્યાઓ લખવાની કોઈ શક્યતા નથી, તેથી રમત 4, 8, 12 અને 16 [યાદીમાં 12, 16, 4, 8 આ ક્રમિક શ્રેણીમાં આવે છે] સંખ્યાઓ સાથે સમાપ્ત થાય છે.
- There are four numbers in the list, and here the second player is the winner, as he/she wrote the last number 8.
યાદીમાં ચાર સંખ્યાઓ છે અને અહીં ખેલાડી-2 વિજેતા છે, કારણ કે તેણે છેલ્લી સંખ્યા 8 લખી.

Play this game with your partner multiple times. Study the lists of numbers that you got for each game and record your observations in the table below. For the last column, where you record the winner, mention whether Player 1 (who chose the first number) won or Player 2 (who chose the second number) won. તમારા જોડીદાર સાથે આ રમત અમુક વખત રમ્યા પછી, દરેક રમત માટે મેળવેલી સંખ્યાઓની યાદીનો અભ્યાસ કરો. નીચેના કોષ્ટકમાં તમારા અવલોકનની નોંધ કરો. છેલ્લા કોલમ માટે, જ્યાં તમે વિજેતાની નોંધ કરો છો, ત્યાં ઉલ્લેખ કરો કે ખેલાડી-1 (જેણે પ્રથમ સંખ્યા પસંદ કરી) જીત્યો કે ખેલાડી-2 (જેણે બીજી સંખ્યા પસંદ કરી) જીત્યો.

Initial Numbers પ્રારંભિક સંખ્યાઓ		The smallest number in the list યાદીમાં સૌથી નાની સંખ્યા	The largest number the list યાદીમાં સૌથી મોટી સંખ્યા	All numbers in a sequence (in ascending order) યાદીની બધી સંખ્યાઓ (ચડતા ક્રમમાં)	How many numbers are there in your the list? યાદીમાં કેટલી સંખ્યાઓ છે?	Winner વિજેતા
Player 1 ખેલાડી-1	Player 2 ખેલાડી-2					

Task 2: Predict the numbers in the list**કાર્ય 2: સૂચિમાંની સંખ્યાઓનું અનુમાન કરો**

Let us assume that following are the initial numbers in the game. Based on these, can you predict the numbers that you will arrive at, while playing the game?

ધારો કે રમતમાં શરૂઆતની સંખ્યાઓ નીચે મુજબ છે. શું તમે અનુમાન કરી શકો છો કે જો તમે આ સંખ્યાઓ સાથે રમત રમો તો તમારી સૂચિમાં કઈ સંખ્યાઓ આવશે?

[Hint: If you are stuck, look at the table you just made. See if there is any relationship between the initial numbers and the numbers in the list.]

(સંકેત: જો તમે આગળ વધતા અટકી જાવ, તો તમે બનાવેલ કોષ્ટક જુઓ. શરૂઆતની સંખ્યાઓ અને સૂચિમાંની સંખ્યાઓ વચ્ચે કોઈ સંબંધ છે કે, તે જુઓ.)

1. Predict all the numbers in the list if:

સૂચિમાંના તમામ સંખ્યાઓનું અનુમાન કરો જો:

i. The initial numbers are 9 and 15.

શરૂઆતની સંખ્યાઓ 9 અને 15 છે.

ii. The initial numbers are 20 and 9.

શરૂઆતની સંખ્યાઓ 20 અને 9 છે.

iii. The initial numbers are 13 and 17.

શરૂઆતની સંખ્યાઓ 13 અને 17 છે.

iv. The initial numbers are 7 and 35.

શરૂઆતની સંખ્યાઓ 7 અને 35 છે.

2. How did you predict the numbers for each example? Did you notice any patterns across the examples?

તમે કેવી રીતે અનુમાન કર્યું કે દરેક ઉદાહરણ માટે કઈ સંખ્યાઓ આવશે? શું તમે આ ઉદાહરણોમાં કોઈ સ્વરૂપો જુઓ છો?

3. Now that you know the strategy for finding the list, can you predict the strategy that will ensure that one of the players will always win the game? (Which player can adopt this strategy and always win?)

હવે, તમે જાણો છો કે યાદી મેળવવા માટે કઈ વ્યૂહરચનાનો ઉપયોગ કરવો. શું તમે એવી વ્યૂહરચના વિચારી શકો છો કે એક ખેલાડી હંમેશા આ રમત જીતે? (આ વ્યૂહરચનાનો ઉપયોગ કરીને કયો ખેલાડી હંમેશા જીતી શકે છે?)

Task 3: Looking for proofs of some conjectures**કાર્ય ૩: કેટલાક અનુમાનનો માટેના પુરાવા જોવાં**

Some students made these interesting observations after playing a few rounds of the game:
કેટલાક વિદ્યાર્થીઓએ થોડી વાર રમ્યા પછી આ રસપ્રદ અવલોકનો કર્યા:

Observation 1: The smallest number in the final list is the HCF of the initial pair of numbers.

અવલોકન ૧: અંતિમ યાદીમાં સૌથી નાની સંખ્યા એ પ્રારંભિક સંખ્યાઓની જોડીનો ગુ.સા.અ. છે.

Observation 2: All and only the multiples of this smallest number up to the largest number appear in the list.

અવલોકન ૨: સૌથી નાની સંખ્યાથી, સૌથી મોટી સંખ્યા સુધીના તમામ અને માત્ર ગુણાંકો યાદીમાં દેખાય છે.

1. Can you figure out why this happened with every pair of numbers?

શું તમે તારવી શકો કે સંખ્યાઓની દરેક જોડી સાથે આવું કેમ થયું?

Let us look at the two observations.

ચાલો બે અવલોકનો જોઈએ.

• Observation 1 says the following:

a) The smallest number in the list divides both the initial numbers.

b) The smallest number is not just any common factor, but the HCF of the two initial numbers.

અવલોકન ૧ પ્રમાણે:

a) યાદીમાં સૌથી નાની સંખ્યા બંને પ્રારંભિક સંખ્યાઓને વિભાજિત કરે છે.

b) સૌથી નાની સંખ્યા એ ફક્ત સામાન્ય અવયવ નથી, પરંતુ બે પ્રારંભિક સંખ્યાઓનો ગુ.સા.અ. છે.

• Observation 2 says the following:

a) All the numbers in the list are multiples of the smallest number in the list.

b) All the multiples of the smallest number up to the largest number appear in the list.

અવલોકન ૨ પ્રમાણે:

c) યાદીમાંની તમામ સંખ્યાઓ યાદીમાં સૌથી નાની સંખ્યાના ગુણાંક છે.

d) સૌથી નાની સંખ્યાથી, સૌથી મોટી સંખ્યા સુધીના તમામ અને માત્ર ગુણાંકો યાદીમાં દેખાય છે.

2. We need to prove or justify these observations. Can you think about the ways of doing this?

આપણે આ અવલોકનોને સાબિત કરવા અથવા વાજબી ઠેરવવાની જરૂર છે. શું તમે આ કરવાની રીતો વિશે વિચારી શકો છો?

Points to Ponder**ધ્યાનમાં લેવા જેવી બાબતો:**

• Do all pairs of numbers allow for a winning strategy? If not, what kinds of numbers will allow for a winning strategy?

શું સંખ્યાઓની બધી જોડી જીતવા માટે વાપરી શકાય? જો નહીં, તો જીતવા માટે સંખ્યાઓની કઈ જોડીનો ઉપયોગ કરી શકાય?

- What happens if you allow for first three numbers to be random? Say, by making it a three player game? ધારો કે ત્રણ લોકો આ રમત એક સાથે રમે છે અને ત્રણ સંખ્યાઓથી શરૂઆત કરે છે, તો શું થશે?

References

- Euclid's Game (યુક્લિડની રમત): <https://www.cut-the-knot.org/blue/EuclidAlg.shtml>
- The optimal strategy in Euclid's game (યુક્લિડની રમતમાં શ્રેષ્ઠ વ્યૂહરચના): <https://math.stackexchange.com/questions/754461/optimal-strategy-in-euclids-game>

Credits

Main Authors: Jayasree S., Shweta Naik

Reviewers: Amol Dighe, H. C. Pradhan

Editors: Beena Choksi, Geetanjali Date, Ankush Gupta, Reema Mani, K. Subramaniam

Translator: Amish Parmar

Editors: Bhavana Trivedi, Parag Shah

Editorial Assistance: Amish Parmar, Jayesh Parmar

Creative Commons Licence: CC BY-SA 4.0 International, HBCSE