

## LU 8.1. Euclid's game

### यूक्लिड का खेल

#### Introduction

##### परिचय

Playing games is a lot of fun. Today you are going to play a game that involves numbers, and based on these numbers you will find out a way to win the game, always!

खेल खेलना बहुत मजेदार होता है। आज आप एक खेल खेलने जा रहे हैं जिसमें संख्याएँ शामिल हैं, और इन संख्याओं के आधार पर आप हमेशा इस खेल को जीतने का तरीका खोजेंगे !

**Materials required:** Blackboard, chalk and sheets of paper.

**सामग्री:** ब्लैकबोर्ड, चॉक और कागज़ की शीट।

#### Task 1: Play the Euclid's game

##### कार्यकलाप 1: आइए, यूक्लिड का खेल खेलें

1. This is a two-player game.

यह दो खिलाड़ियों का खेल है।

2. The rules of the game are as follows:

खेल के नियम इस प्रकार हैं :

- You can decide who plays first. The first player, say Player 1, writes down a number that is between 1 and 100, including both. Let's call this number 'A'. The second player, say Player 2, can write down another number of his/her choice. Let's call this number 'B'.

आप तय कर सकते हैं कि कौन खेल शुरू करेगी। पहली खिलाड़ी, जिसे हम खिलाड़ी 1 कह सकते हैं, 1 और 100 के बीच की कोई संख्या लिखती है जिसमें ये दोनों संख्याएँ भी शामिल हो सकती हैं। आइए हम इस संख्या को 'A' कहते हैं। दूसरी खिलाड़ी, जिसे हम खिलाड़ी 2 कहते हैं, उसकी पसंद की एक और नंबर लिख सकती हैं। आइये इस संख्या को 'B' कहते हैं।

- Now, the first player will write the number  $(A - B)$  or  $(B - A)$ , whichever is positive. Let's call this number 'C'.

अब, पहली खिलाड़ी संख्या  $(A - B)$  या  $(B - A)$  लिखेगी, जो भी इनमें से धनात्मक हो। आइए इस संख्या को 'C' कहते हैं।

- Next, it is the second player's turn. He/She has a choice. He/She can either write the difference between C and A or the difference between C and B. However, if one of these differences is already written in the list (i.e., if it is equal to A or B or C) then it cannot be written again. (All differences are to be taken positive)

इसके बाद, अब दूसरे खिलाड़ी की बारी है। उसके पास एक विकल्प है। वह या तो C और A के बीच का, या फिर C और B के बीच का अंतर लिख सकता/ सकती है। लेकिन यदि इनमें से कोई संख्या पहले से ही सूची में है (अर्थात, यदि यह A या B या C है) तो इसको दोबारा नहीं लिखा जा सकता ( इस प्रकार लिए गए सभी अंतरों के धनात्मक मान लिए जाते हैं )

- Similarly, in subsequent turns, the players take turns to write a number which is the difference between any two numbers written in the list, provided the number itself is not already present in the list.

इसी तरह, बाद की पारियों में, प्रत्येक खिलाड़ी अपनी पारी पर दी गई सूची में से किन्हीं भी दो संख्याओं के बीच अंतर लिखती है बशर्ते कि वह संख्या सूची में पहले से ही मौजूद न हो।

- The game ends when it is not possible to write any new number.  
खेल तब समाप्त होता है जब कोई नई संख्या लिखना संभव नहीं होता है।
- The person who wrote the last number will be the winner.  
वह खिलाड़ी जिसने अंतिम संख्या लिखी, वह विजेता होगी।

Let us look at a sample run of the game.

आइए, हम इस प्रकार का एक खेल खेल कर देखते हैं:

- Suppose, the first player writes 12. The second player has 99 choices to choose his/her number. (as the upper limit is 100).  
मान लीजिए, पहला खिलाड़ी 12 लिखता है। दूसरे खिलाड़ी के पास अपनी संख्या चुनने के लिए 99 विकल्प हैं (क्योंकि यहाँ संख्याओं की ऊपरी सीमा 100 ली गई है)।
- Suppose, the second player chooses 16, then the first player can only write 4, i.e. the difference between 16 and 12.  
मान लीजिए, दूसरा खिलाड़ी 16 चुनता है, तो पहला खिलाड़ी केवल 4 लिख सकता है, जो की 16 और 12 के बीच का अंतर है।
- The second player then writes 8, the difference between 12 and 4. Note that the player could not have written the difference between 16 and 4, as 12 is already in the list.  
अब दूसरा खिलाड़ी संख्या 8 लिखता है, जो 12 और 4 के बीच का अंतर है। नोट कीजिए कि दूसरा खिलाड़ी 16 और 4 के बीच का अंतर नहीं लिख सकता था, क्योंकि 12 पहले से ही सूची में मौजूद है।
- Now there is no possibility of writing new numbers, so the game ends with the numbers 4, 8, 12, and 16 appearing in the list (12, 16, 4, 8 in the order of appearance).  
अब नए नंबर लिखने की कोई संभावना नहीं है, इसलिए खेल समाप्त होता है। संख्याएँ 4, 8, 12, और 16 सूची में दिखाई दे रही हैं (प्रकट के क्रम में कहें तो 12, 16, 4, 8)।
- There are four numbers in the list, and here the second player is the winner, as he/she wrote the last number 8.  
सूची में चार नंबर हैं, और दूसरा खिलाड़ी विजेता है, क्योंकि उसने अंतिम संख्या 8 लिखी है।

Play this game with your partner multiple times. Study the lists of numbers that you got for each game and record your observations in the table below. For the last column, where you record the winner, mention whether Player 1 (who chose the first number) won or Player 2 (who chose the second number) won.

इस खेल को अपने साथी के साथ कई बार खेलें। उन संख्याओं की सूचियों का अध्ययन करें जो आपको प्रत्येक बार खेल में प्राप्त होती हैं और उन्हें नीचे दी गई तालिका में भरें। अंतिम कॉलम में, जहां आप विजेता का नाम लिखते हैं, यह उल्लेख करें कि खिलाड़ी 1 जीता (जिसने पहली संख्या चुनी थी) या खिलाड़ी 2 जीता (जिसने दूसरी संख्या चुनी थी)।

Initial Numbers प्रारंभिक संख्या		The smallest number in your sequence सूची में सबसे छोटी संख्या	The largest number in your sequence सूची में सबसे बड़ी संख्या	All numbers in a sequence (in ascending order) सूची में सभी संख्याएँ (आरोही क्रम में)	How many numbers are there in your sequence? सूची में कितनी संख्याएँ हैं ?	Winner विजेता
Player 1 खिलाड़ी 1	Player 2 खिलाड़ी 2					

Table 1

**Task 2: Predict the sequence**

**कार्यकलाप 2: आइये क्रम की भविष्यवाणी करें**

Let us assume that following are the initial numbers in the game. Based on these, can you predict the numbers that you will arrive at, while playing the game?

आइए, हम मान लेते हैं कि निम्नलिखित संख्याएँ खेल की शुरुआती संख्याएँ हैं। इनके आधार पर क्या आप उन संख्याओं का अनुमान लगा सकते हैं जिन तक खेल खेलते हुए आप पहुँचेंगे ?

**(Hint:** If you are stuck, look at the table you just made. See if there is any relationship between the initial numbers and the numbers in the list.)

**(संकेत:** यदि आप अनुमान नहीं लगा पा रहे हैं, तो आपने जो तालिका अभी-अभी बनाई है उसे देखें। देखें कि सूची में प्रारंभिक संख्या और अन्य संख्याओं के बीच क्या कोई संबंध है)

1. Predict all the numbers in the list if :

सूची में सभी नंबरों की भविष्यवाणी करें यदि :

i. The initial numbers are 9 and 15.

प्रारंभिक संख्याएँ 9 और 15 हैं।

---

ii. The initial numbers are 20 and 9.

प्रारंभिक संख्याएँ 20 और 9 हैं।

---

iii. The initial numbers are 13 and 17.

प्रारंभिक संख्याएँ 13 और 17 हैं।

---

iv. The initial numbers are 7 and 35.

प्रारंभिक संख्याएँ 7 और 35 हैं।

---

2. How did you predict the numbers for each example? Did you notice any patterns across the examples?

आपने प्रत्येक उदाहरण के लिए संख्याओं की भविष्यवाणी कैसे की ? क्या आपने इन उदाहरणों में किसी भी विन्यास को पाया ?

---



---



---

The teacher then can engage students in a discussion on how can they justify that their strategy for finding the numbers in the list will always work. Please study the section '*Mathematical and pedagogical explanations*' for suggestions/ideas on how to lead this discussion.

शिक्षक फिर छात्रों से इस पर चर्चा कर सकते हैं कि वे सूची में दी गई संख्याएँ खोजने की अपनी रणनीति को हमेशा प्रभावी रहने वाली कैसे सिद्ध करेंगे । इस चर्चा को आप आगे कैसे बढ़ाएँगे इस संबंध में सुझावों/ विचारों के लिए कृपया अनुभाग 'गणित और शिक्षा-विज्ञान से संबंधित स्पष्टीकरण' का अध्ययन करें ।

3. Now that you know the strategy for finding the list, can you predict the strategy that will ensure that one of the players will always win the game? (Which player can adopt this strategy and always win?)

अब जब आप सूची की संख्याओं को पता लगाने की तरकीब जान चुके हैं तो क्या आप एक ऐसी तरकीब का पूर्वानुमान लगा सकते हैं जो यह सुनिश्चित करे कि खिलाड़ियों में से एक तय खिलाड़ी हमेशा इस खेल को जीतेगा ? ( कौन-सा खिलाड़ी इस रणनीति को अपना सकता है और हमेशा जीत सकता है ? )

---



---



---

### Task 3: Looking for proofs of some conjectures

#### कार्यकलाप 3: कुछ अनुमानों के प्रमाण की तलाश

Some students made these interesting observations after playing a few rounds of the game:

कुछ छात्रों ने खेल की कुछ पारियाँ खेलने के बाद ये दिलचस्प अवलोकन प्रस्तुत किए :

**Observation 1:** The smallest number in the final list is the HCF of the initial pair of numbers.

**अवलोकन 1:** अंतिम सूची में सबसे छोटी संख्या संख्याओं की प्रारंभिक जोड़ी का महत्तम समापवर्तक (HCF) है

**Observation 2:** All and only the multiples of this smallest number up to the largest number appear in the list.

**अवलोकन 2:** इस सबसे छोटी संख्या के सभी गुणज, सूची की सबसे बड़ी संख्या तक, सूची में दिखाई देते हैं ।

1. Can you figure out why this happened with every pair of numbers?

क्या आप यह पता लगा सकते हैं कि प्रत्येक संख्याओं की जोड़ी के लिए ऐसा क्यों होता है ?

---



---

Let us look at the two observations.

आइए हम इन दो अवलोकनों पर निगाह डालें ।

- Observation 1 says the following:

अवलोकन 1 निम्नलिखित कहता है:

- a) The smallest number in the list divides both the initial numbers.  
सूची में सबसे छोटी संख्या दोनों प्रारंभिक संख्याओं को विभाजित करती है।
- b) The smallest number is not just any common factor, but the HCF of the two initial numbers.  
सबसे छोटी संख्या कोई भी सामान्य गुणखंड नहीं है, वरन यह दो प्रारंभिक संख्याओं का महत्तम समापवर्तक (HCF) है।
- Observation 2 says the following:  
अवलोकन 2 का तात्पर्य निम्नलिखित है:
- a) All the numbers in the list are multiples of the smallest number in the list,  
सूची की सभी संख्याएँ सूची में विद्यमान सबसे छोटी संख्या के गुणक हैं,
- b) All the multiples of the smallest number up to the largest number appear in the list.  
सूची में सबसे छोटी संख्या के सबसे बड़ी संख्या तक के सभी गुणक दिखाई देते हैं।

2. We need to prove or justify these observations. Can you think about the ways of doing this?

हमें इन अवलोकनों को साबित करने या उचित ठहराने की आवश्यकता है। क्या आप ऐसा करने के तरीकों के बारे में सोच सकते हैं ?

## Points to Ponder

### विचारणीय बिन्दु

1. Do all pairs of numbers allow for a winning strategy? If not, what kinds of numbers will allow for a winning strategy?  
क्या संख्याओं की सभी जोड़ियाँ विजयी रणनीति अनुमत करती हैं ? यदि नहीं, तो किस प्रकार की संख्याएँ विजयी रणनीति अनुमत करेंगी ?
2. What happens if you allow for first three numbers to be random? Say, by making it a three player game?  
क्या होगा यदि आप पहले तीन नंबरों को अनियमित (random) होने की अनुमति देते हैं ? उदाहरण के लिए इसे यदि तीन खिलाड़ियों का खेल बनाकर खेला जाए तो निष्कर्ष क्या होगा ?

## References

### संदर्भ

- Euclid's Game: <https://www.cut-the-knot.org/blue/EuclidAlg.shtml>
- The optimal strategy in Euclid's game: <https://math.stackexchange.com/questions/754461/optimal-strategy-in-euclids-game>

## Credits

### साभार

**Main Authors:** Jayasree S., Shweta Naik

**Reviewers:** Amol Dighe, H. C. Pradhan

**Editors:** Beena Choksi, Geetanjali Date, Ankush Gupta, Reema Mani, K. Subramaniam

**Hindi Translator:** Ram Sharan Dass

**Hindi Translation Coordination:** Krishna Kumar Mishra

**Hindi Translation Editors:** Praveen Pathak, Sarita Naswa, Yogesh Dahiya

**Hindi Editorial Assistance:** Somesh Meena

**Creative Commons Licence:** CC BY-SA 4.0 International, HBCSE